

Работа 9

Определение моментов инерции тел методом вращательных колебаний

Цель работы: определение момента инерции диска методом вращательных колебаний и проверки теоремы Гюйгенса-Штейнера.

Введение

Основной закон динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси выражается формулой:

$$I_z \ddot{\phi} = N_z, \quad (1)$$

где I_z - момент инерции тела относительно оси z ; $\ddot{\phi}$ - угловое ускорение тела; N_z - момент сил, действующих на тело относительно оси z .

Моментом инерции материальной точки относительно вращения называется произведением массы этой точки m на квадрат расстояния r до оси вращения,

$$I_z = mr^2. \quad (2)$$

Момент инерции твердого тела зависит не только от массы тела, но и от расположения частиц тела относительно оси вращения. Чтобы найти момент инерции тела надо просуммировать моменты инерции всех материальных точек, составляющих данное тело, т.е.

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2, \quad (3)$$

где r_i - радиус i -й точки до оси вращения.

В случае непрерывного распределения масс по объему тела эта сумма сводится к интегралу

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV, \quad (4)$$

где интегрирование производится по всему объему тела. Величина r в этом случае есть функция положения точки относительно оси вращения с координатами x, y, z .

Если тело вращается относительно оси, проходящей через центр инерции тела, то момент инерции относительно этой оси обозначается через I_c . Для тел правильной

геометрической формы, масса которых равномерно распределена по объему значения I_c обычно приводятся в справочной литературе.

Момент инерции относительно любой оси вращения, не проходящей через центр инерции, определяется теоремой Штейнера: момент инерции относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции (тяжести) тела I_c , и произведения массы тела m на квадрат расстояния между этими осями a^2 :

$$I = I_c + ma^2. \quad (5)$$

В данной работе предлагается экспериментально определить момент инерции тела по методу вращательных колебаний.

Пусть тело, момент инерции I_0 которого нужно определить состоит из закрепленного на вертикальной оси шкива (диска), перекинутого через него ремня, который связан с упругими пружинами, зацепленными за штыри стойки.

В положении равновесия силы упругости пружин, а, следовательно, и силы натяжения нити с разных сторон от стола, равны. Обозначим эти силы F_0 . Для выведения шкива из положения равновесия повернем его на угол φ . Тогда натяжение одной пружины увеличится, а другой уменьшится на $\varphi d/2$, где d – радиус шкива. По закону Гука силы упругости изменятся на $k d \varphi/2$, здесь k – коэффициент жесткости пружины. На шкив будет действовать возвращающий момент сил:

$$N = \frac{d}{2} \left(F_0 - k_1 \frac{d}{2} \varphi \right) - \frac{d}{2} \left(F_0 + k_2 \frac{d}{2} \varphi \right) = -\frac{d^2}{4} (k_1 + k_2) \varphi, \quad (6)$$

где k_1, k_2 - коэффициент жесткости пружин.

Сделаем следующую замену:

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2}. \quad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела получаем дифференциальное уравнение для φ :

$$I_0 \ddot{\varphi} + \frac{d^2}{2} k \varphi = 0. \quad (8)$$

Уравнение такого вида есть уравнение гармонических колебаний. Из теории дифференциальных уравнений следует, что его решение имеет вид:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \delta),$$

Здесь φ_0 и δ – константы, определяемые начальными условиями, а

$$\omega = \sqrt{\frac{d^2 k}{2I_0}} \quad (9)$$

– частота колебаний. Следовательно, тело совершающие вращательные колебания, колеблется с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2I_0}{kd^2}} = \sqrt{\frac{8\pi^2 I_0}{kd^2}}. \quad (10)$$

Если к телу прикрепить дополнительные грузы на расстояниях a от оси вращения, то период колебаний станет

$$T' = \sqrt{\frac{8\pi^2 (I_0 + I_{zp})}{kd^2}}, \quad (11)$$

где $I_0 + I_{zp}$ – момент инерции тела с дополнительными грузами.

Если в качестве грузов использовать два одинаковых цилиндра массой m и радиусом r , расположенных на расстоянии a симметрично относительно оси вращения тела, то момент инерции I_{zp} по теореме Штейнера

$$I_{zp} = 2 \left(\frac{1}{2} mr^2 + ma^2 \right). \quad (12)$$

Изменяя расстояние грузов от оси вращения, период колебаний будет меняться согласно уравнению (11), т.е.

$$T(a) = \sqrt{\frac{8\pi^2 (I_0 + mr^2 + 2ma^2)}{kd^2}}. \quad (13)$$

Возведем в квадрат данное уравнение, получим

$$T^2(a) = \frac{8\pi^2 I_0}{kd^2} + \frac{8\pi^2 mr^2}{kd^2} + \frac{8\pi^2 \cdot 2ma^2}{kd^2}$$

или

$$T^2(a) = \frac{8\pi^2}{kd^2} (I_0 + mr^2) + 2ma^2 \frac{8\pi^2}{kd^2}. \quad (14)$$

Видно, что

$$T^2(a) = \beta a^2 + \gamma, \quad (15)$$

где

$$\beta = \frac{16\pi^2 m}{kd^2}, \quad \gamma = \frac{8\pi^2}{kd^2} (I_0 + mr^2).$$

Уравнение (15) есть уравнение прямой.

Если теорема Штейнера справедлива, то график зависимости $T^2 = f(a^2)$ должен быть прямой. Тангенс угла наклона (рис. 1) $\tan \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, с другой стороны, из уравнения (15)

$$\tan \varphi = \frac{16\pi^2 m}{kd^2}, \quad (16)$$

что дает возможность определить значение коэффициента жесткости пружин.

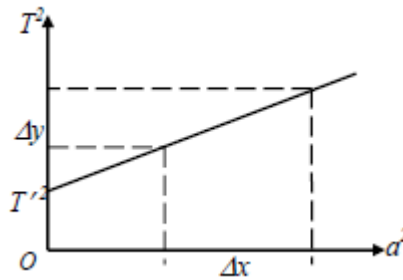


Рис.1

Если полученную прямую продолжить, то прямая пересекает ось ординат в точке $a^2 = 0$, тогда из формулы (15)

$$T_0^2 = T^2(a=0) = \frac{8\pi^2}{kd^2} (I_0 + mr^2). \quad (17)$$

Что позволяет рассчитать момент инерции I_0 тела.

В данной работе исследуемое тело представляет собой диск с закрепленным на нем металлическим профилем. Момент инерции такой системы рассчитывается по формуле

$$I_0 = \frac{1}{2} MR_0^2 + \frac{1}{12} m(l^2 + b^2), \quad (18)$$

где M и R_0 – масса и радиус диска; m – масса металлического профиля, l и b – длина и ширина соответственно.

Методика выполнение работы

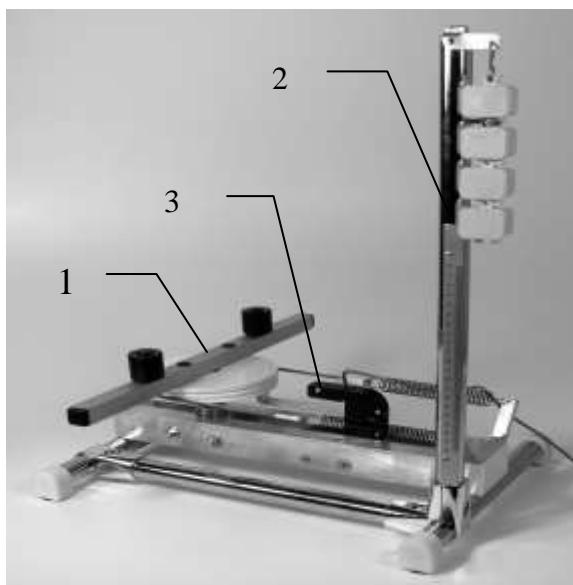


Рис.2

Лабораторная установка (рис.2) состоит из колебательной системы 1, вращающейся в горизонтальной плоскости, устройства 2 для измерения жесткости используемых пружин, компьютера с необходимым программным обеспечением и концентратора для подключения оптического датчика к компьютеру.

Колебательная система (рис.3) состоит из закрепленного на вертикальной оси шкива 1, ремень 2 которого связан с упругими пружинами 3, зацепленными за штыри стойки. К шкиву жестко прикреплен

металлический профиль 4 с рядом отверстий 5, в которых фиксируются грузы 6. Вращательные колебания регистрируются оптическим датчиком 7 в форме импульсов при перекрытии оптической оси датчика стрелкой 8, жестко скрепленным со шкивом колебательной системы.

Устройство для измерения жесткости пружин, входящее в состав лабораторной установки, состоит из стойки с подвесом, набора калиброванных грузов весом по 100 г каждый и металлической линейки (рис.2).

Коэффициент жесткости пружин k , входящих в выражение (6), можно определить по величине растяжения пружин Δl под действием весовой нагрузки:

$$P = k\Delta l,$$

откуда

$$k = \frac{P}{\Delta l} \quad (19)$$

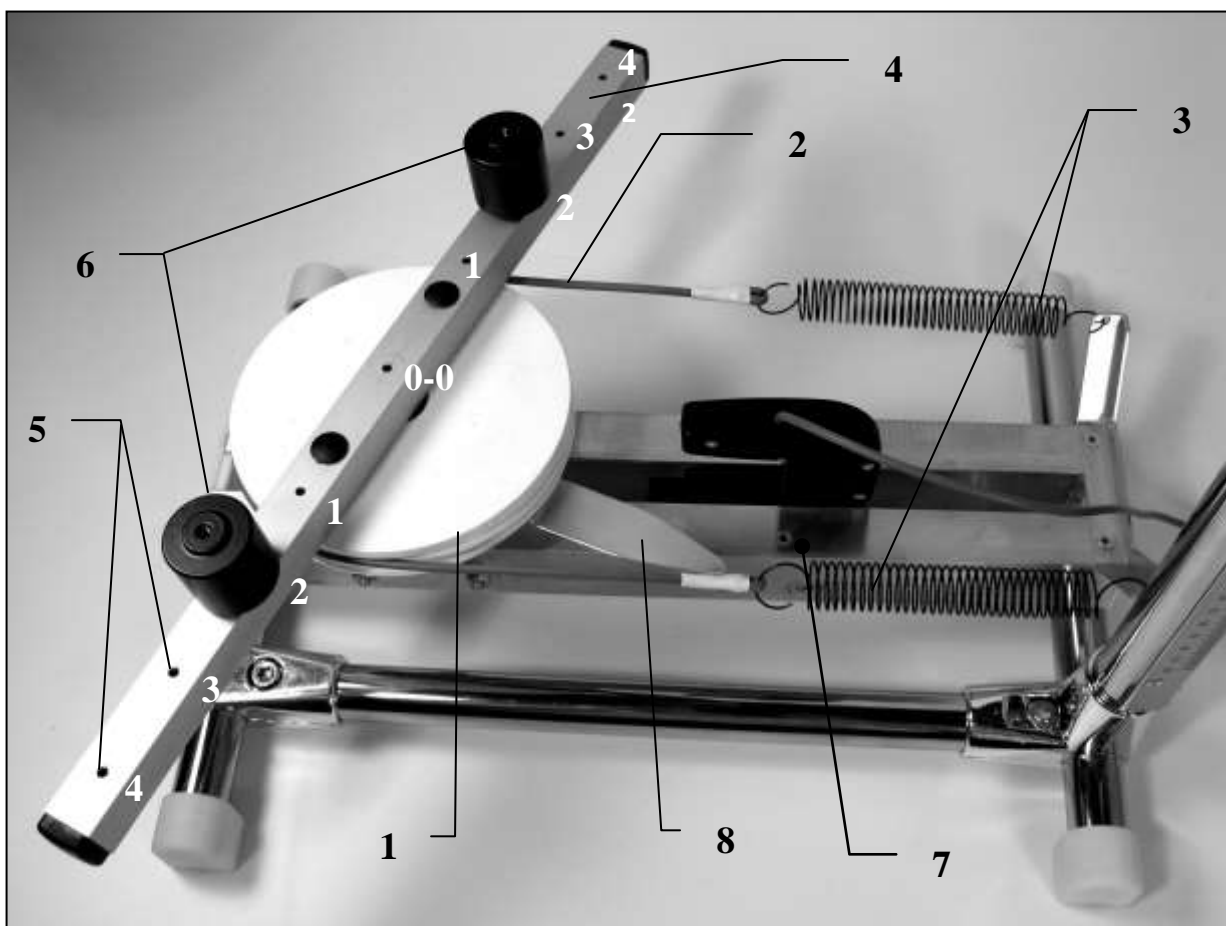


Рис.3

Порядок выполнения работы

1. Перенесите в таблицу 1 данные о весе разновесок P и массе грузов m . Измерьте диаметр шкива d и расстояния от оси шкива до фиксирующих отверстий r . Полученные значения запишите в таблицу 1.

Таблица 1

$P, Н$	$m, г$						
$0,98 \pm 0,01$	202 ± 1						

2. Измерьте жесткость пружин.

- Снимите обе пружины с колебательной системы и повесьте их поочередно за кронштейн подвеса стойки.
- Подвесьте к пружине 3 груза общим весом $P_1 = 3P$.

- Зафиксируйте статическое положение нижнего основания третьего груза l_1 на шкале измерительной линейки (рис.4) и запишите результат в таблицу 2.
- Подвесьте к пружине дополнительно еще один груз, чтобы общий вес стал равным $P_2 = 4P$.
- Зафиксируйте статическое положение нижнего основания третьего груза l_2 на шкале измерительной линейки, запишите результат в таблицу 2
- Вычислите жесткость пружин

Таблица 2

$P_1, \text{Н}$	$P_2, \text{Н}$	$l_1, \text{мм}$	$l_2, \text{мм}$	$\Delta l, \text{мм}$	$k, \text{Н/м}$

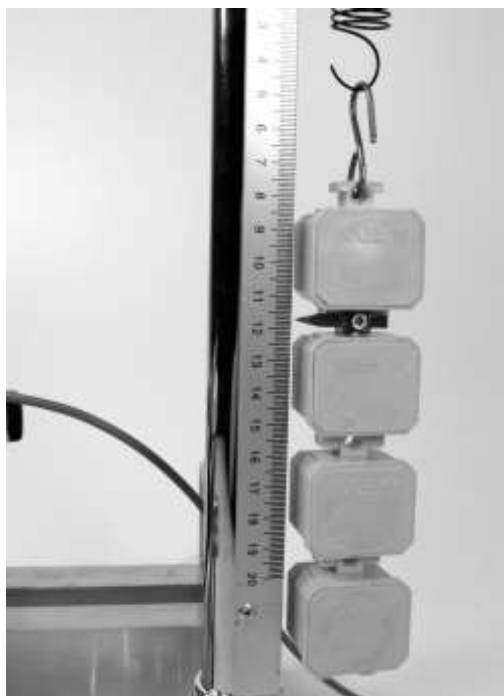



Рис.4

3. Подключите оптический датчик к входу концентратора, присоединив последний к USB – входу компьютера (по умолчанию он присоединен).
4. После включения компьютера запустите программу «Физика - практикум». В окне «Выбор эксперимента» запустите работу «Проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера методом вращательных колебаний». Соответствующий сценарий проведения эксперимента также можно выбрать на панели устройств (Alt+C) .



5. Соберите колебательную систему в соответствии с рис.2 и 3, поместив грузы m в позицию "0-0".
6. Установите стрелку шкива 8 (рис.3) под оптическим датчиком 7 (рис.3).
7. Запустите измерения для выбранного датчика (Ctrl+S)  и сразу, непосредственно вслед за запуском произведите в движение колебательную систему.
8. После записи нескольких импульсов перекрытия (7-8) остановите измерения (Ctrl+T) .
9. Проведите обработку полученных данных в соответствии со сценарием, для чего:
 - ✓ выделите область из 3-4 импульсов перекрытия для ее детального просмотра с увеличенным масштабом (Alt+левая кнопка мыши);
 - ✓ измерьте период колебаний маятника по передним или задним фронтам соседних четных (либо нечетных) импульсов перекрытий путем постановки желтого (левая клавиша мыши) и зеленого маркера (правая клавиша мыши) на соответствующие фронты импульса перекрытия.
 - ✓ Полученное время запишите в таблицу 3.
10. Выполните измерения периодов еще четырежды по пп.5-9, размещая последовательно грузы m в позициях "1-1", "2-2", "3-3", и "4-4" (рис.3). Результаты измерений запишите в таблицу 3.
11. Постройте на миллиметровой бумаге график зависимости $T^2 = f(a^2)$. Убедитесь в справедливости теоремы Штейнера
12. Определите из графики момент инерции I_0 тела (диск плюс металлический профиль). Для этого продолжите прямую до пересечения с осью ординат и определите T_0^2 . Далее используя формулу определите I_0 .

Таблица 3

"n-n", номер позиции	Период T_n, c			Период $\langle T \rangle \pm \Delta T c$	a^2, cm^2
	1	2	3		
"0-0"					
"1-1"					
"2-2"					
"3-3"					
"4-4"					

13. Рассчитайте момент инерции I_0 по формуле (18), используя табличные значения, и сравните полученные результаты.

14. Напишите заключение к работе.

9. Контрольные вопросы

1. Опишите метод вращательных колебаний, который используется в лабораторной работе при измерениях моментов инерции и периодов колебаний.

2. Сформулируйте теорему Гюйгенса - Штейнера, которая используется для вычисления момента инерции тела относительно произвольной оси.

3. Опишите устройство лабораторной установки.

4. Расскажите о порядке выполнения лабораторной работы и проведении измерений.

5. Дайте оценку случайной относительной погрешности результатов проверки выполнения теоремы Штейнера.

6. Дайте определение момента силы, момента импульса, момента инерции абсолютно твердого тела относительно некоторой оси.

7. Сформулируйте основной закон вращательного движения.

8. Сформулируйте закон сохранения момента импульса.

9. Рассчитайте момент инерции тела по указанию преподавателя.