# *Информация к размышлению… Лето 2011.*

## Задачи на числа.

1. Незнайка выписал по кругу 11 натуральных чисел. Для каждых двух соседних чисел он посчитал их разность (из большего вычел меньшее). В результате среди найденных разностей оказалось четыре единицы, четыре двойки и три тройки. Докажите, что Незнайка где-то допустил ошибку.

2. Назовем натуральное число "изумительным", если оно имеет вид $a^b + b^a$ (где $a$ и $b$ - натуральные числа). Например, число 57 - изумительное, так как $57 = 2^5 + 5^2$. Является ли изумительным число 2011?

3. Найдите значение дроби В*А*Р*Е*Н*Ь*Е / К*А*Р*Л*С*О*Н, где разные буквы – это разные цифры, а между буквами стоит знак умножения.

4. Найдите какие-нибудь семь последовательных натуральных чисел, каждое из которых можно изменить (увеличить или уменьшить) на 1 таким образом, чтобы произведение семи полученных в результате чисел равнялось произведению семи исходных чисел.

5. К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы четна.

6. При каком наибольшем $n$ можно раскрасить числа 1, 2, ..., 14 в красный и синий цвета так, чтобы для любого числа $k$ = 1, 2, ..., $n$ нашлись пара синих чисел, разность между которыми равна $k$, и пара красных чисел, разность между которыми тоже равна $k$?

7. Решить в целых числах уравнение $x + y = x^2 - xy + y^2$.

8. Докажите, что уравнение $x^x + 2y^y = z^z$ не имеет решений в натуральных числах.

9. Даны натуральные числа $a$ и $b$, причем $a < 1000$. Докажите, что если $a^{21}$ делится на $b^{10}$, то $a^2$ делится на $b$.

## Логика.

10. Ученики 7 класса решали две задачи. В конце занятия учитель составил четыре списка: I – решивших первую задачу, II – решивших только одну задачу, III – решивших по крайней мере одну задачу, IV – решивших обе задачи. Какой из списков самый длинный? Могут ли какие-то списки совпадать по составу? Если да, то какие?

11. Угол при вершине журавлиного клина равен $20^{\circ}$. Как изменится величина этого угла при рассматривании журавлей в бинокль с троекратным увеличением?

12. Как при помощи чашечных весов без гирь разделить 24 кг гвоздей на две части — 9 и 15 кг?

13. Нужно узнать пятизначный шифр, задавая вопросы, на которые возможен ответ "да" или "нет". За какое наименьшее число вопросов это гарантированно можно сделать (при условии, что на вопросы даются правильные ответы)?

14. Таня стоит на берегу речки. У неё есть два глиняных кувшина: один — на 5 литров, а про второй Таня помнит лишь то, что он вмещает то ли 3, то ли 4 литра. Помогите Тане определить ёмкость второго кувшина. (Заглядывая в кувшин, нельзя понять, сколько в нём воды.)

15. Трое друзей решают жребием, кто идет за соком. У них есть одна монета. Как им устроить жребий, чтобы все имели равные шансы бежать?

16. На прямоугольной полосе 1х$n$ ($n > 3$) в клетках с номерами $n - 2$, $n - 1$, $n$ стоит по одной фишке. Двое играют в следующую игру: каждый игрок своим ходом может перенести любую (но только одну) фишку на любую свободную клетку с меньшим номером. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередного хода. Доказать, что игрок, который совершает первый ход, может играть так, чтобы наверняка победить.

17. Каждому из трех логиков написали на лбу целое положительное число, причем одно из этих чисел было суммой двух других, и сообщили им об этом. Каждый логик не видит, что написано у него на лбу, но видит, что написано у других. Первый логик сказал, что не может догадаться, какое число у него на лбу. То же самое сказали второй и третий. Тогда первый сказал: "Я знаю, у меня на лбу число 50". Какие числа написаны у двух остальных?

18. В компании из шести человек любые пять могут сесть за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. Докажите, что и всю компанию можно усадить за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми.

19. Учащиеся одной школы часто собираются группами и ходят есть мороженое. После такого посещения они ссорятся настолько, что никакие двое из них после этого вместе мороженое не едят. К концу года выяснилось, что в дальнейшем они могут ходить в кафе-мороженое только поодиночке. Докажите, что если число посещений было к этому времени больше 1 , то оно не меньше числа учащихся в школе.

20. Из 19 шаров 2 радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько их). Докажите, что за 8 проверок всегда можно выделить оба радиоактивных шара.

## Геометрия.

21. Существует ли выпуклый 2011-угольник, у которого все углы выражаются целым числом градусов?
22. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие — на катетах. Найдите стороны прямоугольника, если известно, что они относятся как 5:2, а гипотенуза треугольника равна 45.
23. Каждый катет прямоугольного треугольника увеличили на единицу. Могла ли его гипотенуза увеличиться более, чем на $\sqrt{2}$ ?
24. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке $O$ . Описанные окружности треугольников $AOB$ и $COD$ пересекаются в точке $M$ на основании $AD$ . Докажите, что треугольник $BMC$ равнобедренный.
25. Дан треугольник $ABC$. Найдите все такие точки $P$, что площади треугольников $ABP$, $BCP$ и $ACP$ равны.

26. На гипотенузе $BC$ прямоугольного треугольника $ABC$ выбрана точка $K$ так, что $AB = AK$. Отрезок $AK$ пересекает биссектрису $CL$ в ее середине. Найдите острые углы треугольника $ABC$. Биссектрисы углов $A$ и $C$ трапеции $ABCD$ пересекаются в точке $P$, а биссектрисы углов

$B$ и $D$ — в точке $Q$, отличной от $P$. Докажите, что если отрезок $PQ$ параллелен основанию $AD$, то трапеция равнобокая.

27. В треугольнике $ABC$ проведены биссектрисы $BB_1$ и $CC_1$. Описанные окружности треугольников $ABB_1$ и $ACC_1$ пересекаются в точке, лежащей на стороне $BC$. Найдите величину угла $A$.

## Принцип Дирихле.

28. В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдется кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежит не менее 10 из данных точек.

29. В правильном 2000-угольнике 801 вершина покрашена в красный цвет. Докажите, что найдутся 3 красные вершины, образующие равнобедренный треугольник.