

АЛГЕБРА.

ТЕМЫ (теоретическая часть).

1. Степень с натуральным показателем.
2. Свойства степеней с натуральным показателем.
3. Одночлены и многочлены.
4. Действия над многочленами.
5. Формулы сокращенного умножения.
6. Уравнения с одной переменной.
7. Уравнение с двумя переменными и его график.
8. Линейные уравнения с двумя переменными и их системы.
9. Функция и ее график. Линейная функция.
10. Модуль. Алгебраическое и геометрическое определение модуля. Уравнения с модулем.

УПРАЖНЕНИЯ (практическая часть).

1. Вычислите:

1.1 $(6,8547:2,19 + 0,6039:5,49):1,62$

1.2 $(0,9893:0,13-6,4) \cdot 62,9 - 7,109$

1.3 $(1\frac{3}{4}:1,125 - 1,75:\frac{2}{3}) \cdot 1\frac{5}{7}$

1.4 $\frac{(19\frac{1}{6}+43,75):\frac{5}{6}}{(13,3-11,5):\frac{4}{6}} - \frac{(26,8-23\frac{3}{7})\frac{6}{35}}{0,5}$

1.5 $\frac{20\frac{8}{15}\cdot 7,5-54,6:\frac{2}{5}}{3\frac{13}{21}\cdot 8,4-34,4:14\frac{1}{3}} + 43,75:11\frac{2}{3} + 24,6:1\frac{1}{5}$

1.6 $\frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 11} + \frac{1}{11\cdot 15} + \frac{1}{15\cdot 19} + \frac{1}{19\cdot 23}$

1.7 $\frac{0,4613^3-0,1613^3}{0,3} - 3 \cdot 0,4613 \cdot 0,1613$ (в № 1.7 – 1.14 вычисления производить

рациональным способом)

1.8 $\frac{(97^2-53^2)\cdot(150^2-97\cdot 53)}{97^3-53^3}$

1.9 $8yx^3 - 12x^2y + 6xy - y$ при $x = 0,75; y = -0,32$

1.10 $4 \cdot (4 - 3b)^2 - 49b^2$ при $b = -\frac{2}{13}$

1.11 $7 \cdot 64^8 - 12 \cdot 8^{16} + 5 \cdot 16^{12}$

1.12 $\frac{(4\cdot 5^{19}+3\cdot 125^6)\cdot 46^2}{(23\cdot 25^3)^3}$

1.13 $\frac{79^3+21^3}{10^4-3\cdot 79\cdot 21}$

1.14 Определить x из пропорции: $(\frac{97^3-53^3}{44} + 97 \cdot 53): (152,5^2 - 27,5^2) =$
 $x: (19,25^2 - 18,25 \cdot 20,25).$

2. Упростите выражение:

2.1 $(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) + b \cdot (a - b)^2 - a \cdot (a - b) \cdot (a + 2b)$

2.2 $a \cdot (a + 1 - a^2) - 3a^3 \cdot \left(\frac{1}{27}a - 2\right) + \left(-\frac{1}{3}a^2\right)^2$

3. Разложите на неразложимые множители:

3.1 $(3x + 5)(4x - 5) - 2x(2,5 + 1,5x)$

3.2 $a^3 + 8b^3 + a^2 - 2ab + 4b^2$

3.3 $a^4 - 8a^2x + 16x^2$

3.4 $27a^5 - a^2 + 1 - 27a^3$

3.5 $x^4 - 2x^2 - 3$

3.6 $a^3 + a^2x - 3ax + 9x + 27$

3.7 $y^4 - 25y^2 + 60y - 36$

3.8 $125xy^3 - 8x + 30y(2x - 5xy)$

4. Решите уравнения:

4.1 $(2x + 3)^2 = 8x + 12$

4.2 $(x - 2)^3 - x(1 - 2x)^2 + (3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) + 2x^2 = 24x^3$

4.3 $\left(\frac{2x-3}{2} + \frac{3x+3}{4}\right)^2 = \left(3 - \frac{x+5}{3}\right)^2$

4.4 $|4x + 8| + 3 = 11$

4.5 $||x| + 7| = 8$

4.6 $(x + 3) \cdot |x + 1| = \frac{(4-x)(x+3)}{2}$

4.7 $|3x + y| + (5 - |2y + 1|)^{1514} = 0$

5. Докажите, что:

5.1 $(8^5 + 16^3 - 5 \cdot 2^{11})$ делится на 26

5.2 При любом натуральном n : $(3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n)$ делится на 10

5.3 Если x и y — целые числа и $(x^2 + 9xy + y^2)$ делится на 11, то $(x^2 - y^2)$ делится на 11

5.4 Если $a + b + c = 2p$, то $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 16p(p - a)(p - b)(p - c)$

5.5 Выражение $x^2 - 2x + 2y^2 - 8y + 12$ принимает положительные значения при любых x и y . Найдите наименьшее значение этого выражения и укажите x, y , при которых оно достигается.

5.6 Значение выражения $x^2 + 4y^2 - 4xy - 4x + 8y + 4$ неотрицательно при любых x, y .

5.7 Разность квадратов двух последовательных целых чисел равна сумме этих чисел.

6. 6.1 Даны точки $A(4;3)$ и $B(-3;-11)$. Напишите уравнение прямой AB . Напишите уравнение прямой, параллельной прямой $-3x+2y=7$ и пересекающейся с прямой AB на оси Oy . Постройте эти прямые.

6.2 При каком значении a прямая, заданная уравнением $ax-3y=6a$, проходит через точку пересечения прямых $y = -3x+2$ и $y = 2x-8$. Постройте эти три прямые.

6.3 Постройте график функции $y = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 2 \\ 2x - 5, & x > 2 \end{cases}$

6.4 Постройте график функции $y = \frac{4-x^2}{|x+2|}$

6.5 Постройте график уравнения $|x + 1| \cdot y = x^2 - 1$

6.6 Постройте график уравнения $(|y| - 3)((x + 1)^2 + y^2) = 0$

7. Текстовые задачи:

- 7.1 Саша проходит путь от дома до школы за 20 минут, а его младший брат Витя – за 30 минут. Через сколько минут Саша догонит Витю, если Витя вышел из дома на 5 минут раньше Саши?
- 7.2 Расстояние от А до В автобус проходит по расписанию со скоростью 40 км/ч. Однажды, пройдя половину пути, он сделал остановку на 20 мин. и, чтобы прибыть в В вовремя, на оставшейся части пути ехал со скоростью 45 км/ч. Найдите расстояние АВ.
- 7.3 Два бегуна одновременно стартовали из одного и того же места в одном и том же направлении. Спустя 1 час, когда одному из них оставалось бежать 1,5 км до финиша, ему сообщили, что второй бегун миновал финиш 5 минут назад. Найдите скорость каждого бегуна, если известно, что скорость первого на 3 км/ч меньше скорости второго.
- 7.4 Двое рабочих должны были сделать по 40 одинаковых деталей. Первый начал работать на 2 часа позже второго. Через 1,5 часа после этого оказалось, что первый сделал на 9 деталей меньше, чем второй. А ещё через 2 часа 30 минут первому осталось сделать в 2 раза больше деталей, чем второму. Сколько деталей в час делает каждый рабочий?
- 7.5 Два пешехода отправились навстречу друг другу – один из пункта А в пункт В, другой из пункта В в пункт А. Через 2 часа они встретились на расстоянии 8 км от А и 6 км от В. Достигнув пункта назначения, они, не задерживаясь, пошли обратно. В каком месте пути они опять встретятся?
- 7.6 Автомобиль проехал расстояние от А до В со скоростью v_1 км/ч за t_1 часов, а обратный путь от В до А за t_2 часов. Запишите алгебраическим выражением: а) расстояние от А до В; б) скорость v_2 движения автомобиля от В до А; в) общее время движения туда и обратно; г) среднюю скорость движения за все время пути.
- 7.7 В 100 г 20% раствора соли добавили 300 г ее 10% раствора. Определите концентрацию полученного раствора.
- 7.8 Какое количество воды надо добавить к 100 г 70% уксусной эссенции, чтобы получить 5% раствор уксуса?
- 7.9 Цену на товар сначала повысили на 20%, а затем понизили на 20%. На сколько процентов изменилась первоначальная цена?
- 7.10 Что больше: 20% от 10% данного числа или 10% от его 20%?
- 7.11 Из пункта А вниз по реке отправился плот. Через 1 час навстречу ему из пункта В, находящегося в 30 км от А, вышла моторная лодка, которая встретилась с плотом через 2 часа после его выхода. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч.
- 7.12 Петя выполняет некоторую работу за 2 дня. Коля выполняет эту работу за 3 дня, а Вася – за 6 дней. а) за какое время они выполнят эту работу вместе?

б) за какое время они выполнят всю работу, если сначала третью часть её выполнит один Петя, затем половину оставшегося – Коля, а уже остальное – Вася? в) кто выполнит работу быстрее: Петя один или Коля и Вася вместе?

8. Системы линейных уравнений:

8.1 Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 3(x + y) + 1 = x + 4y \\ 7 - 2(x - y) = x - 8y \end{cases}$$

8.2 Пусть
$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x + y + v = 11 \\ x + z + v = 15 \\ y + z + v = 3 \end{cases}$$
. Найдите: а) $x+y+z+v$; б) x, y, z, v

9. Пусть $x_1 + x_2 = 7, x_1 \cdot x_2 = 2$. Найдите: $x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2; x_1^2 + x_2^2; x_1^3 + x_2^3$.

10. Логические задачи:

- Три ученика одной школы - Коля, Дима и Наташа участвовали в математической олимпиаде и получили одну первую, одну вторую и одну третью премии, но им не сообщили, кто какую премию получил. Позже Таня сказала, что Дима получил не первую, Коля - не вторую, Наташа получила вторую премию. Потом оказалось, что из этих трех высказываний верным было только одно, а два ложны. Какую премию получил каждый ученик?
- Можно ли в листе бумаги, вырванном из школьной тетради, прорезать такую дыру, в которую пролезет взрослый человек?
- Последовательность чисел строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на единицу. Какое число стоит на 1000 месте?
- Существует ли такое целое число, которое при зачеркивании первой цифры уменьшается в 57 раз? В 58 раз?
- Дана полоска клетчатой бумаги длиной в 100 клеток. Двое играющих по очереди красят клетки в черный цвет, причем первый всегда красит четыре подряд стоящие клетки, а второй – три подряд стоящие. Уже покрашенную клетку второй раз красить нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре: первый или второй?
- Можно ли так расположить фишки в клетках доски 8×8 (в каждой клетке одна фишка), чтобы в любых двух вертикалях фишек было поровну, а в любых двух горизонталях – не поровну?
- Имеется 4 монеты, три из которых – настоящие, весящие одинаково, а одна – фальшивая, отличающаяся от них по массе. Имеются также чашечные весы без гирь. Они таковы, что если положить на их чашки одинаковые по массе грузы, то любая из чашек может перевесить, а если грузы различны по массе, то всегда перевесит чашка с более тяжелым грузом. Как за три взвешивания на таких весах наверняка выявить фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее настоящих?

8. Как, имея лишь два сосуда вместимостью в 5 и 7 л, налить из водопроводного крана 6 л воды?
9. Из полного сосуда емкостью в 12 л надо отлить половину, пользуясь двумя пустыми сосудами емкостью в 8 и 5 литров? Каким образом в сосуд вместимостью в 8 л отлить 6 л воды?
10. Четыре приятеля, отдыхавшие в одном санатории, шесть дней сидели в столовой за одним столом. Борис был у них «председателем» и все время занимал одно и то же место. Остальные трое каждый день рассаживались по-новому. В понедельник справа от Олега сидел маляр, а слева – инженер. Во вторник слева от Бориса сидел учитель, другим соседом учителя был Олег. В среду справа от Николая сидел маляр, а слева – учитель. В четверг место справа от столяра занимал инженер, а слева – Дмитрий. В пятницу столяр сидел слева от Николая. Кто сидел в субботу справа и слева от Бориса?