ГБОУ лицей № 1511 при МИФИ, г.Москва
Работу выполнил: Бодров Виктор Вадимович, учащийся 11-ого класса
Научный руководитель: Волков Владимир Евгеньевич, доцент кафедры высшей математики НИЯУ «МИФИ», кандидат физико-математических наук

Исследование линейных диофантовых уравнений

Цель работы — исследование наиболее оптимальных методов решения линейных диофантовых уравнений, а так же использование их для решения ряда задач по теории чисел.

Линейным диофантовым уравнением с двумя неизвестными называется уравнение вида $ax + by = c$, где $a,b,c,x,y \in Z$; $a \cdot b \neq 0$, причем a,b,c – заданные, x,y – искомые.

Пара чисел $x = x_0$, $y = y_0$ называется решением (или частным решением) уравнения , если $ax_0 + by_0 = c$ - верное числовое равенство. Например, (1,1) – решение уравнения $2x + 3y = 5$, так как $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$ - верно.

Решить уравнение означает найти все его решения или доказать, что решений нет. Совокупность всех частных решений уравнения называется его общим решением.

Обозначим через d наибольший общий делитель натуральных чисел $|a|$ и $|b|$: d=НОД($|a|$;$|b|$).

- Если $|c|$ не делится на d, то уравнение не имеет решений в целых числах

Пример. $35x – 20y = 14$. Так как НОД(35;20) = 5, а 14 на 5 не делится, то данное уравнение не имеет решений в целых числах.

- Если $|c|$ делится на d, то уравнение имеет целые решения. В этом случае следует упростить уравнение, разделив обе его части на d

Пример. $28x – 40y = 60$. Так как НОД(28;40) = 4, а 60 делится на 4, то, сокращая обе части заданного уравнения на 4, получим равносильное уравнение $7x – 10y = 15$

Историческое отступление

Диофант (Dióphantos), (вероятно, 3 в.), - древнегреческий математик из Александрии. Он представляет одну из занимательных загадок в истории математики. Мы не знаем, кем был Диофант, точные года его жизни, нам не известны его предшественники, которые работали бы в той же области, что и он.

Основной труд Диофанта (ок. 250 г.) - "Арифметика". Уцелели только шесть книг оригинала, общее их число - предмет догадок. Мы не знаем, кем был Диофант, - возможно, что он был эллинизированный вавилонянин. Его книга - один из наиболее увлекательных трактатов, сохранившихся от греко-римской древности. В ней впервые встречается систематическое использование алгебраических символов, есть особые знаки для обозначения неизвестного, минуса, обратной величины, возведения в степень.

Диофант Александрийский

Схема исследования уравнения

Задача - решить уравнение в случае, когда $d = 1$, то есть когда числа $|a|$ и $|b|$ взаимно просты:

1) Нахождение частного решения (x_0,y_0) уравнения
2) Нахождение общего решения уравнения через частное. Все пары чисел (x,y) удовлетворяют решению уравнения при любых целых значениях t

$$\begin{cases} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at, t \in Z. \end{cases}$$

Пример. Общее решение уравнения $2x+3y=5$ имеет вид

$$\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 1 - 2t, t \in Z. \end{cases}$$

Таким образом задача сводится к решению вспомогательного уравнения $ax + by = d$

Для решения линейных диофантовых уравнений широко используется метод замены правой части на делитель свободного члена. Для решения основного уравнения $ax + by = c$ потребуется решить вспомогательное уравнение $ax + by = d$(d — делитель с, чаще всего d=1). Тогда, если корни вспомогательного уравнения - (x_0,y_0), корни основного уравнения - $(c \cdot x_0/d, c \cdot y_0/d)$.

Алгоритмы решения линейных диофантовых уравнений

Общепринятые алгоритмы решений:
- с использованием алгоритма Евклида
- с использованием подходящей дроби
- с составлением таблиц неизвестных, частных и остатков
- с заменой переменной

Нами предлагается:
- использование рядов кратных для чисел $|a|$ и $|b|$ (при малых коэффициентах)

- использование цепных и подходящих дробей (при больших коэффициентах)

Использование рядовы кратных

Пример. 15*z* + 19*y* = 9.
Выпишем ряды кратных для чисел 15 и 19 до тех пор, пока они не будут отличаться на Делитель числа 9 (1,3,9):
15, 30, 45, <u>60</u> (15·4 = 60)
19, 38, <u>57</u> (19·3 = 57)
Мы видим, что числа 60 и 57 отличаются на 3. Тогда вспомогательное уравнение 15*z* + 19*y* = 9. Так как 15·4 + 19·(-3) = 3, то (4,-3) – частное решение вспомогательного уравнения, а (4·3,-3·3)=(12,-9) — решение заданного уравнения. Общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} z = 12 - 19t, \\ y = -9 + 15t, t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Пример. 24*x* + 19*y* = 826
Ряды кратных для 24 и 19:
24, 48, 72, <u>96</u> (24·4 = 96),
19, 38, 57, 76, <u>95</u> (19·5 = 95);
Тогда частное решение вспомогательного уравнения 24x + 19y =1 – (4,-5), а решение заданного уравнения – (4·826,-5·826). Общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x = 4\cdot 826 + 19t, \\ y = -5\cdot 826 - 24t, t \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

Использование цепных и подходящих дробей

Цепная дробь (или непрерывная дробь) — это математическое выражение вида

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$$

Где a_0 есть целое число и все остальные a_n натуральные числа. Любое вещественное число можно представить в виде цепной дроби (конечной или бесконечной). Число представляется конечной цепной дробью тогда и только тогда, когда оно рационально.

Подходящая дробь - наилучшее приближение данного числа среди всех дробей, знаменатели которых не превосходят знаменатель подходящей дроби.

Для решения линейного диофантового уравнения с большими коэффициентами мы представим дробь |*a*|/|*b*| в виде цепной. Отбрасывая в ней поледнюю дробь мы получим подходящую дробь |*xo*|/|*yo*|.

<u>Пример.</u> 113*x*+179*y*=17
Представим отношение коэффициентов при неизвестных в виде цепной дроби:

$$\frac{179}{113} = 1 + \frac{66}{113} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{47}{66}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{19}{47}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{19}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{9}}}}}.$$

Отбрасывая последнюю дробь 1/9, получим подходящую дробь:

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{5}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{5}{7}} = 1 + \frac{7}{12} = \frac{19}{12}.$$

Подходящая дробь для исходной дроби обладает свойством:

$$\left|\frac{19}{12} - \frac{179}{113}\right| = \frac{1}{12\cdot 113}, \Rightarrow |113\cdot 19 - 179\cdot 12| = 1.$$

Произведение 179·12 (оно оканчивается на 8) на единицу больше произведения 113·19 (оно оканчивается на 7), поэтому 113·(–19) +179·12 = 1, то есть (–19,12) – частное решение вспомогательного уравнения 113*x* + 179*y* = 1. Отсюда 113·(–19·17) + +179·(12·17) = 17, то есть (–19·17,12·17) = (–323,204) – частное решение исходного уравнения 113*x* +179*y* = 17, а его общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x = -323 + 179t, \\ y = 204 - 113t, t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Решение задач через линейные диофантовы уравнения

Линейные диофантовы уравнения могут быть полезным исчтрументом для решения множества математических задач на теорию чисел и делимость. В том числе для решения некоторых из задач С6 единого государственного экзамена, наиболее актуальных в наше время.

<u>Пример (из вступительного экзамена в МИФИ).</u> Акционер приобрёл в начале года m акций двух банков и получил в конце года доход в размере 259 у.е. Доход за год по одной акции первого банка составил 17 у.е., второго – 9 у.е. Сколько акций первого банка приобрёл акционер?

Пусть акционер приобрёл *x* акций первого банка и *y* акций второго банка, тогда из условия задачи получаем уравнение: $17x + 9y = 259.\ x \geq 0, y \geq 0$
Разделим 259 на 17 с остатком: 259 = 17·15 + 4, тогда имеем:
17*x* + 9*y* = 17·15 + 4, 17(*x* – 15) + 9*y* = 4, 17*z* + 9*y* = 4, где *z* = *x* – 15. Поскольку 18 – 17 = 1, то вспомогательное уравнение 17*z* + 9*y* = 1 имеет частное решение (–1,2), а уравнение 17*z* + 9*y* = 4 имеет частное решение (–4,8), поэтому общее решение уравнения 17*z* + 9*y* = 4 имеет вид:

$$\begin{cases} z = -4 - 9t, \\ y = 8 + 17t, t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Так как *z* = *x* – 15, то *x* – 15 = – 4 – 9*t*, *x* = 11 – 9*t*, то есть общее решение уравнения 17*x* + 9*y* = 259 имеет вид:

$$\begin{cases} x = 11 - 9t, \\ y = 8 + 17t, t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из соотношений $x \geq 0, y \geq 0$ выводим систему неравенств

$$\begin{cases} 11 - 9t \geq 0, \\ 8 + 17t \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq \frac{11}{9}, \\ t \geq -\frac{8}{17}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in$$ {0;1}. Тогда x=11;2; <u>Ответ:</u> 2 или 11

<u>Пример (старинная задача).</u> Крестьянка несла на базар корзину яиц. Всадник, обгоняя женщину, задел корзину, и все яйца разбились. Желая возместить ущерб, он спросил у крестьянки, сколько яиц было в корзине. Она ответила, что числа яиц не знает, но когда она раскладывала их по 2, по 3, по 4, по 5 и по 6, то каждый раз одно яйцо оставалось лишним, а когда она их разложила по 7, лишних яиц не осталось. Сколько яиц несла крестьянка на базар?

Пусть число яиц равно x. Так как x – 1 делится на 2, на 3, на 4, на 5, на 6, то оно делится на их наименьшее общее кратное 60. Значит, x имеет вид 60y + 1. Поэтому для ответа на вопрос задачи надо решить в натуральных числах уравнение 60y + 1 =7z, или 7z – 60y = 1.
Представим коэффициенты при неизвестных в виде цепной дроби:

$$\frac{60}{7} = 8 + \frac{4}{7} = 8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{4}} = 8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}},$$

Подходящая дробь:

$$8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}, \left|\frac{17}{2} - \frac{60}{7}\right| = \frac{1}{2\cdot 7}; |7\cdot 17 - 60\cdot 2| = 1.$$

Модуль раскрывается с минусом: 7·(–17) – 60·(–2) = 1, то есть (–17,–2) – частное решение уравнения 7*z* – 60*y* = 1; его общее решение:

$$\begin{cases} z = -17 + 60t, \\ y = -2 + 7t, t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Поскольку нас интересуют лишь натуральные решения, то $t \in \mathbb{N}$; *x* = 60*y* + 1 = 60(–2 + 7*t*) + 1 = 420*t* – 119;
<u>Ответ:</u> 420*t* – 119, $t \in \mathbb{N}$

<u>Пример (С6, ЕГЭ, 2009 год).</u> Последние члены двух конечных арифметических прогрессий $a_1 = 5, a_2 = 8, \ldots, a_N$ и $b_1 = 9, b_2 = 14, \ldots, b_M$ совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найти число членов в каждой прогрессии.

Для первой прогрессии разность равна $a_2 - a_1 = 3$, поэтому ее общий член имеет вид $a_n = 5 + 3(n-1) = 3n + 2, n \in \mathbb{N}$; аналогично для второй прогрессии
$b_2 - b_1 = 5; b_m = 9 + 5(m-1) = 5m + 4, m \in \mathbb{N}$.
Определим, для каких значений *m* и *n* выполняется равенство
$a_n = b_m : 3n + 2 = 5m + 4$, Или $5m - 3n = -2$.
Так как модули коэффициентов при неизвестных отличаются на модуль свободного члена, легко найти частное решение уравнения $m = n = -1$, тогда общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} n = -1 + 5t, \\ m = -1 + 3t, \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

Тогда $a_n = b_m$ при
$n = 5t - 1, m = 3t - 1; m, n \in \mathbb{N} : a_n = 3(5t-1) + 2 = 15t - 1, b_m = 5(3t-1) + 4 = 15t - 1.$
Общии члены прогрессий можно записать в виде: $c_l = 15l - 1, l = 1, \ldots, L.$
$c_1 = 14, c_L = 15L - 1.$
По условию:

$$\frac{c_1 + c_L}{2}\cdot L = 815; \frac{14 + 15L - 1}{2}\cdot L = 815; L(15L + 13) = 1630; 15L^2 + 13L - 1630 = 0;$$
$$(L - 10)(15L + 163) = 0; L = 10.$$

Тогда число членов в каждой прогрессии равно: $N = 5L - 1 = 49, M = 3L - 1 = 29.$
<u>Ответ:</u> 49 и 29