ГБОУ города Москвы лицей № 1511 при НИЯУ «МИФИ»

О разложении натурального числа на рациональные множители.

Выполнил: Кельин Андрей Валентинович, Подлипаев Сергей Алексеевич

Научный руководитель: Агафонов Виталий Александрович - преподаватель лицея № 1511

Цель работы: Рассмотрение способов разложения натурального числа в произведение нескольких рациональных чисел, сумма которых равна нулю.

В настоящее время известен способ разложения натурального числа на 4 или 5 рациональных чисел, примером может служить разложение с участием двойки:

n=(-n)(n/2)(n/2)(2/n)(-2/n).

Для числа 21 это выглядит следующим образом: **21=(-21/1)(21/2)(21/2)(2/21)(-2/21).**

Также есть и другие способы разложения натурального числа. То же самое число 21 можно представить как:

21=(12/3)(3/3)(-3/2)(-42/12).

Квадрат натурального числа можно раскладывать по следующей формуле:

n^2= (n^2)(- n^2)(1/n)(-1/n).

Например:

25=(25)(-25)(1/5)(-1/5)

64=(64)(-64)(1/8)(-1/8)

В ходе работы мы установили, что минимальное возможное число рациональных чисел, на которые можно разложить натуральное число равно трем. Но так как число 1 не получится разложить на произведение трех рациональных чисел, значит существуют исключения. Доказательство, что число 1 нельзя разложить на 3 рациональных множителя приведено далее.

Так как число 1, куб натурального числа 1, нельзя разложить в произведение 3 множителей, это значит, что любой куб натурального числа нельзя разложить на 3 рациональных множителя.

Поиск решений через кубику:

$$\begin{cases} n = xyz \\ n \in N \\ x,y,z \in Q \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Выразим z через x и y , подставим в уравнение, содержащее n. Сделаем проективные замены для уравнения $yx^2+xy^2+n=0$,

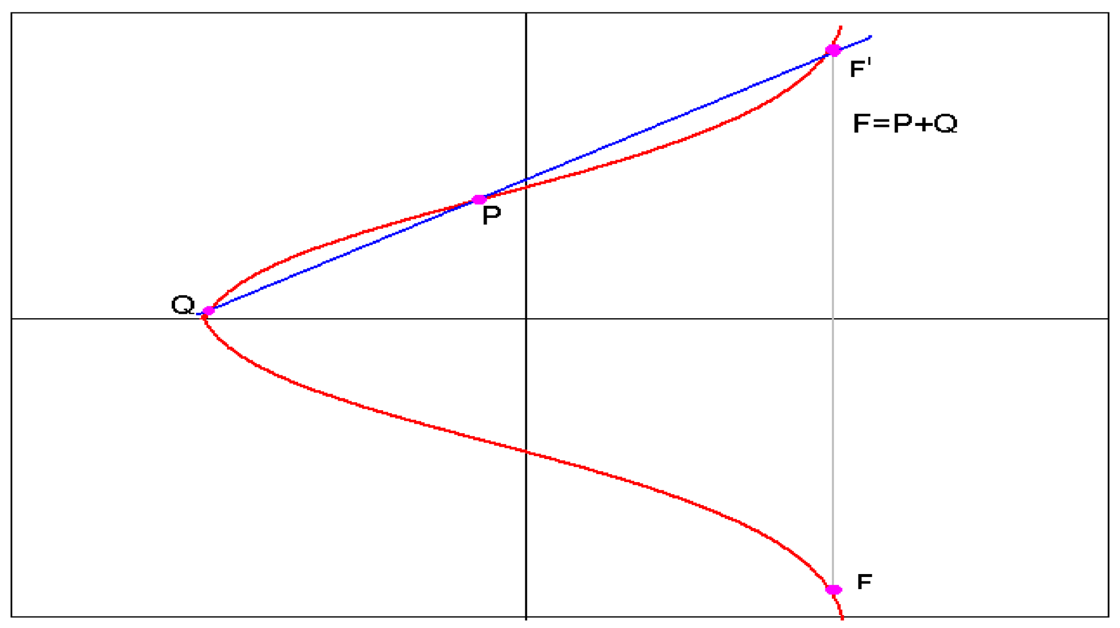
$$y = \frac{4n-\gamma}{2\theta}$$

$$x = \frac{4n+\gamma}{2\theta}$$

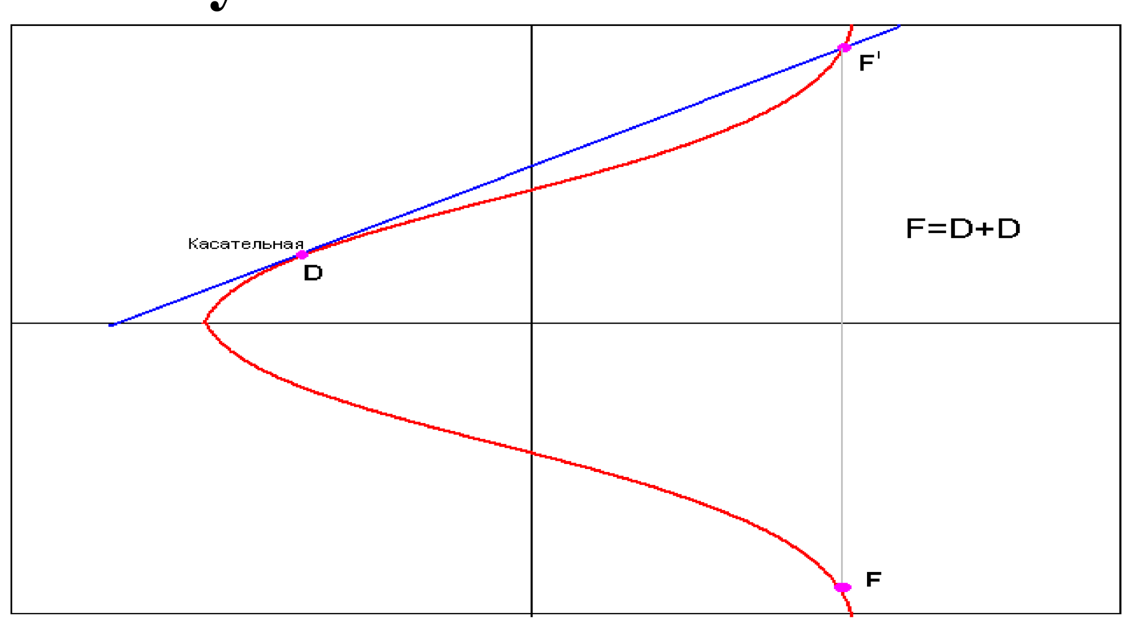
которые приводят нас к каноническому уравнению в форме Вейерштрасса.

$\gamma^2 = \theta^3 + 16n^2$ Это уравнение, как одно из разновидностей эллиптических кривых, обладает их свойствами. А именно получением новых рациональных точек из уже имеющихся путем «сложения» или «удвоения» (проведения касательных в уже найденной точке).

Точка полученная сложением:



Точка полученная касанием:



Рассмотрим примеры:

6=(-1)(-2)(3)

6=(-0.15)(6.4)(-6.25)-найдено с помощью метода касательной

7=(-3.5)(-0.5)(4)

7=(-6.25)(-16/15)(3.15)-с помощью 'сложения'

И так кубика позволяет нам находить дополнительные разложения разложимого числа

Теорема о кубе числа . 1 (а также куб любого натурального числа) нельзя представить в виде произведения трех рациональных множителей, сумма которых равна 0.

$a^2-16=b^3$ q,n $\in$ N ; p,m $\in$ Z\{0}

$$\frac{p^2}{q^2} - 16 = \frac{m^3}{n^3} \quad ; \frac{p}{q}, \frac{m}{n} - \textit{несократимы}$$

Обе дроби несократимы, т.к. НОД(p^2-16q^2;q^2)=1

$p^2-16q^2=m^3$; $q^2=n^3=t^6$; t $\in$ Z ; $p^2-16t^6=m^3$

Поэтому $(p-4t^3)(p+4t^3)=m^3$; $p+4t^3=u$; $u(u-(2t)^3)=m^3$

А) Пусть НОД ($u;8t^3$) =1 тогда u и $u-8t^3$ полные кубы, что противоречит теореме Ферма.

Б) Пусть НОД ($u;8t^3$) =z >1 , тогда u кратно z и $8t^3$ кратно z , т.е. $m^3=z^2$

1)Пусть z- куб целого числа. Тогда $u_1(u_1-t_1^3)=m_1^3$, т.е. мы имеем случай А.

2)Пусть z - не куб целого числа, тогда из того, что $(2t)^3$ кратно z следует, что $2t^3$ кратно k , где k - делитель числа z.

Но тогда u/z <кратно> z и $u(u-8t^3)=m^3$ делится на z^2 , но не делится на z^3 . Такого быть не может. Поэтому уравнение $a^2-16=b^3$ При a и b $\in$ Q не имеет решений.

Частные примеры:

3=(- 0,5) (- 1,5) 4 (-1) (-1) и **3=(363/70)(20/77)(-49/110)(-5)**

Заключение: Любое натуральное число можно разложить на 5 рациональных множителя. На 3 раскладываются не все числа. Остается только решить, на какое минимальное число рациональных множителей можно разложить все натуральные числа. Существует гипотеза о том, что разложение на 4 множителя достаточно для всех натуральных чисел.

Список литературы:

1. Острик В.В. Цфасман М.А. Алгебраическая геометрия и теория чисел. М.: МЦНМО, 2001