ГБОУ лицей № 1511 при НИЯУ МИФИ, 11 класс

Савин Павел

Научный руководитель: заслуженный учитель РФ, преподаватель математики лицея №1511, Александр Владимирович Иванищук

О некоторых свойствах чисел «трибоначчи»

…- 3 56, -271, 421, -206, -56, 159, -103, 0, 56, -47, 9, 18, -20, 7, 5, -8, 4, 1, -3, 2, 0, -1, 1, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, 5768, 10609, 19513, 35890…

Целью работы

является изучение свойств чисел трибоначчи в сравнении со свойствами чисел Фибоначчи.

Введение

Леонардо из Пизы, известный как Фибоначчи, был первым из великих математиков Европы позднего Средневековья. Числовой ряд, носящий сегодня его имя, вырос из проблемы с кроликами, которую Фибоначчи изложил в своей книге «Liber abacci», написанной в 1202 году:

Человек посадил пару кроликов в загон, окруженный со всех сторон стеной. Сколько пар кроликов за год может произвести на свет эта пара, если известно, что каждый месяц, начиная со второго, каждая пара кроликов производит на свет одну пару?

Можете убедиться, что число пар в каждый из двенадцати последующих месяцев будет соответственно

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Иными словами, число пар кроликов создает ряд, каждый член в котором — сумма двух предыдущих. Он известен как *ряд Фибоначчи*, а сами числа — *числа Фибоначчи*.

Числа Фибоначчи являются ярким примером последовательностей, называющихся линейными рекуррентами или возвратными последовательностями.

Огромный вклад в развитие их теории внес французский математик, ***Франсуа Люка***, рассмотревший общий вид последовательностей, заданных по подобию чисел Фибоначчи, которые сейчас носят его имя.

ФИБОНАЧЧИ (Леонардо из Пизы) ок. 1175–1250

Франсуа Эдуард Анатоль Люка (1842-1891)

Числа трибоначчи – линейная рекуррентная последовательность целых чисел третьего порядка, заданная соотношением:

$$t_{n+3} = t_{n+2} + t_{n+1} + t_n,\ \ t_0 = 0,\ \ t_1 = 1,\ t_2 = 1.$$

Своим названием эта последовательность обязана молодому математику, ***Марку Фейнбергу***, написавшему статью о ней в журнал Fibonacci Quarterly (октябрь 1963 г.) в возрасте 14 лет.

Актуальность

Числа трибоначчи, как и числа Фибоначчи, используются в некоторых задачах по нахождению центров масс, комбинаторике, генерации псевдослучайных чисел и в избыточных системах счисления, применяемых в теории алгоритмов и криптографии, а изучение их свойств может дать толчок к новым продвижениям в этих областях.

Получение линейных соотношений

В большинстве своем линейные соотношения в рекуррентных последовательностях выводятся с помощью представления основного возвратного соотношения, задающего последовательность, в другом виде. В ходе работы, используя методы вывода линейных соотношений для чисел Фибоначчи, были получены следующие формулы для чисел трибоначчи:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{t_{n+3} - t_{n+1} - 1}{2};$$

$$\sum_{i=1}^{n} (t_{3i-2} + t_{3i-1}) = t_{3n};$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{2i-1} = \frac{t_{2n+2} - t_{2n+1}}{2};$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{2i} = \frac{t_{2n+3} - t_{2n+2} - 1}{2};$$

Делимость чисел трибоначчи

При изучении свойств делимости членов последовательности трибоначчи с помощью специально написанных компьютерных программ, были сформулированы и доказаны два утверждения:

$$\text{Если } t_{n-1} \vdots p \text{ и } t_n \vdots p, \text{то и } t_{n-4} \vdots p;$$

$$\text{Если } t_n \vdots p,\ t_{i-1} \vdots p \text{ и } t_i \vdots p, \text{то и } t_{n+ik} \vdots p \text{ при } \forall k \in Z;$$

Последняя теорема позволяет определить все индексы чисел трибоначчи, делящихся на заданное p, рассмотрев при этом лишь члены последовательности до первой пары «близнецов» - двух стоящих подряд чисел трибоначчи, делящихся на p. Основываясь на этом, была написана программа, результатом которой являются серии индексов чисел трибоначчи, делящихся на p. Были получены все серии индексов для $p < 1355$, далее представлен результат работы программы для значений $p \leq 10$.

p = 2
Index: 4k
Index: 4k - 1

p = 3
Index: 13k
Index: 13k - 1
Index: 13k - 4
Index: 13k - 6

p = 4
Index: 8k
Index: 8k - 1
Index: 8k - 4

p = 5
Index: 31k
Index: 31k - 1
Index: 31k - 4
Index: 31k - 10
Index: 31k - 12
Index: 31k - 17

p = 6
Index: 52k
Index: 52k - 1
Index: 52k - 4
Index: 52k - 13
Index: 52k - 17
Index: 52k - 32
Index: 52k - 40
Index: 52k - 45

p = 7
Index: 16k
Index: 16k - 1
Index: 16k - 4
Index: 16k - 11

p = 8
Index: 16k
Index: 16k - 1
Index: 16k - 4
Index: 16k - 9

p = 9
Index: 13k
Index: 13k - 1
Index: 13k - 4

p = 10
Index: 124k
Index: 124k - 1
Index: 124k - 4
Index: 124k - 12
Index: 124k - 17
Index: 124k - 32
Index: 124k - 41
Index: 124k - 48
Index: 124k - 72
Index: 124k - 93
Index: 124k - 97
Index: 124k - 105

Цифровой корень числа и последовательность трибоначчи по модулю k

Если сложить все цифры некоторого числа, затем все цифры только что найденной суммы и так продолжать достаточно далеко, то получится одна единственная цифра, которая носит название *цифрового корня* первоначального числа. Ниже выписаны значения цифровых корней первых 50 членов последовательности трибоначчи.

1, 1, 2, 4, 7, 4, 6, 8, 9, 5, 4, 9, 9, 4, 4, 8, 7, 1, 7, 6, 5, 9, 2, 7, 9, 9, 7, 7, 5, 1, 4, 1, 6, 2, 9, 8, 1, 9, 9, 1, 1, 2, 4, 7, 4, 6, 8, 9, 5…

Нетрудно видеть, что последовательность цифровых корней чисел трибоначчи – периодична. Также нетрудно доказать, что для $\forall n \in N$ выполняется сравнение:

$$Num(n) \equiv n\ (mod\ 9),$$
$$\text{где } Num(n) - \text{цифровой корень числа n.}$$

Другими словами, цифровой корень числа является его остатком от деления на 9 с заменой $9 \to 0$, и соответственно последовательность трибоначчи периодична по модулю 9.

В ходе исследования было доказано, что последовательность трибоначчи периодична по любому натуральному модулю k, и при этом ее период не превосходит значения $k^3 - 1$.

Если рассматривать последовательность $\{t_n\ (mod\ k)\}$ начиная с t_0, то ее период будет начинаться со значений 0, 1, 1 и заканчиваться значениями k-1, 1, 0. Используя этот факт, была написана программа, позволяющая вычислить длину периода, названного, по аналогии с числами Фибоначчи, периодом Пизано.

Как и для последовательности Фибоначчи, для периода Пизано справедливо свойство:

$$\pi(m \cdot n) = \text{НОК}\big(\pi(m), \pi(n)\big), \text{при условии НОД}(m, n) = 1.$$

Так же для чисел Фибоначчи существует следующая гипотеза, которая так же выдвинута в ходе работы для чисел трибоначчи:

$$\text{Если } p\ - \text{простое, то } \pi(p^\alpha) = p^{\alpha-1} \cdot \pi(p),$$

проверенная для многих степеней простых чисел при рассмотрении периода Пизано для последовательности Фибоначчи.

Другие гипотезы для последовательности трибоначчи

В 1964 году Дж. Кон доказал теорему о конечном количестве квадратов натуральных чисел в последовательности Фибоначчи. Ими являются числа с индексами 0, 1, 2 и 12 (0, 1, 1 и 144 соответственно).

Наряду с вышеупомянутой гипотезой, основываясь на теореме о конечном числе квадратов в последовательности Фибоначчи и результате работы компьютерной программы, была выдвинута гипотеза о конечном количестве точных степеней натуральных чисел в последовательности трибоначчи:

Среди чисел трибоначчи, имеющих неотрицательный индекс, полными квадратами являются:

$$t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 1, t_{15} = 3136 = 56^2 \text{ и } t_{17} = 10609 = 103^2,$$

а степенью выше второй только:

$$t_0 = 0, t_1 = 1 \text{ и } t_2 = 1.$$

Таблица значений периодов Пизано

Десятки / Единицы	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-	124	248	1612	496	620	3224	1488	992	4836
1	1	110	624	331	560	1248	1860	5113	351	336
2	4	104	220	64	624	168	1324	624	560	4424
3	13	168	553	1430	308	52	624	5328	287	4303
4	8	48	208	96	440	468	128	1876	624	92
5	31	403	155	1488	1209	3410	5208	2015	2976	11160
6	52	32	168	312	2212	48	2860	360	308	832
7	48	96	117	469	46	4680	1519	2640	1820	3169
8	16	156	48	360	416	140	96	2184	880	336
9	39	360	140	2184	336	3541	7189	3120	8011	4290

Литература

[1] Feinberg M. «Fibonacci-Tribonacci». Fibonacci Quart. 1. 1963. P. 71-74.
[2] Воробьев Н. Н., Числа Фибоначчи, 3 изд., М., 1969.
[3] Василенко С. Л., «Циклические структуры и сокрытые периодичности суммирующих рекурсий».
[4] Василенко С. Л., Белянин В.С., Радзюкевич А.В., «Центры масс однородных тел как аттракторы возвратных последовательностей».