



# О некоторых окружностях, связанных с треугольником

Выполнили: ученики ГБОУ лицей 1511 при НИЯУ «МИФИ» Государев Станислав, Чувичкин Владимир

Научный руководитель: Мякишев Алексей Геннадьевич, учитель математики лицея №1303, заслуженный преподаватель г. Москвы

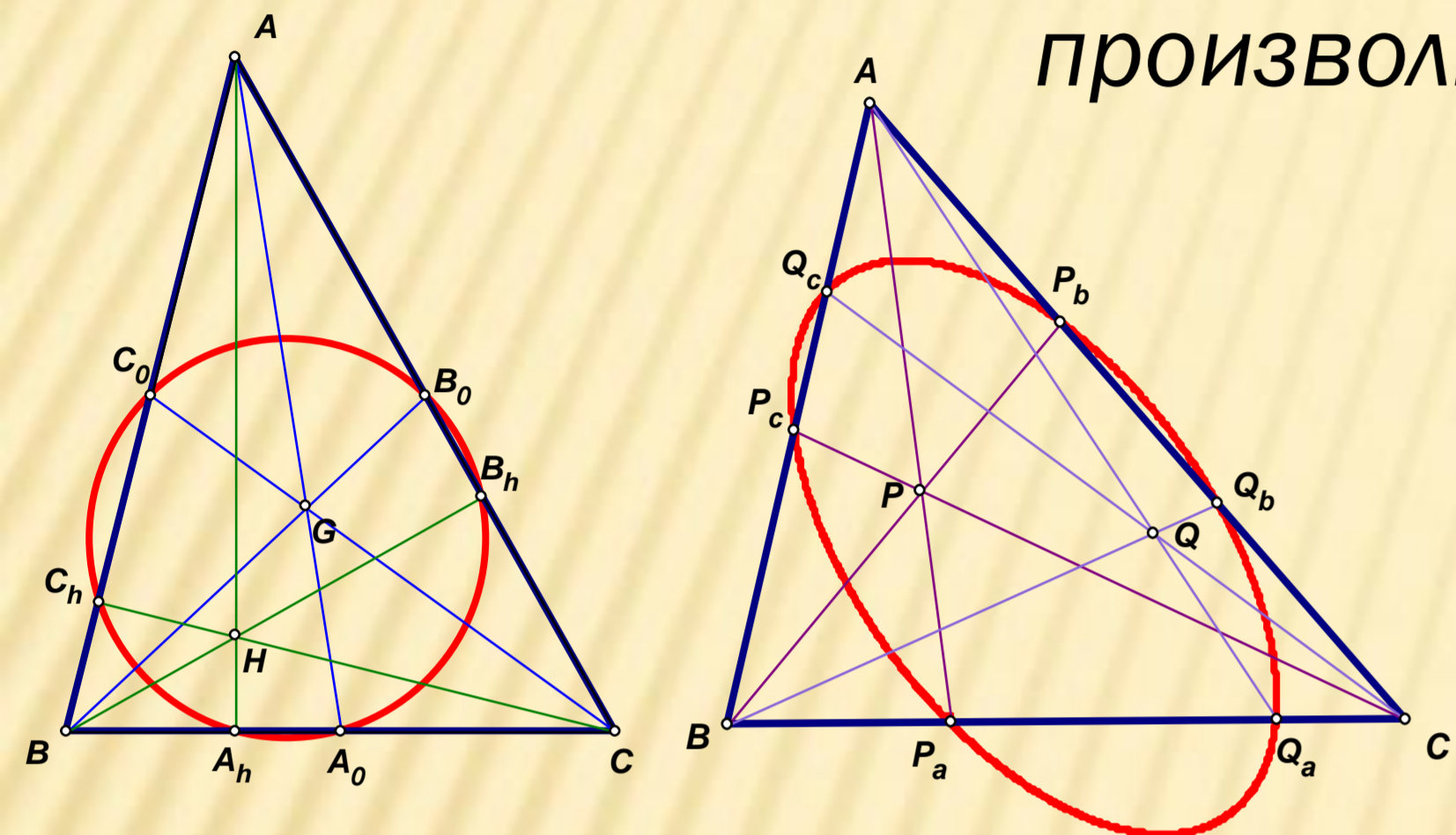
**Цель работы:** нахождение семейств коник, связанных с треугольником и зависящих от произвольной точки в плоскости треугольника.

## Первая конструкция

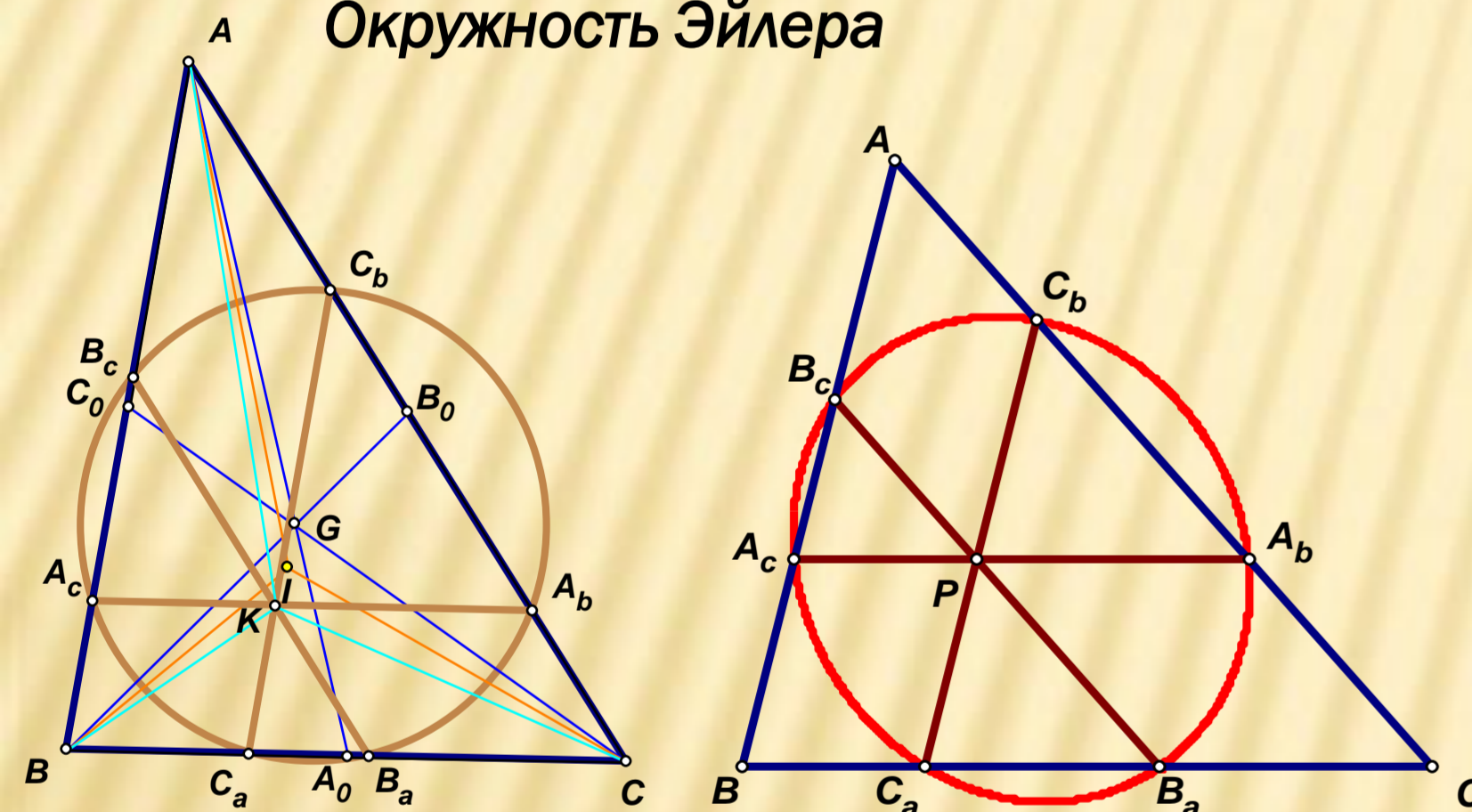
$$\frac{(p+r)(p+q)}{a^2} = \frac{(q+p)(q+r)}{b^2} = \frac{(p+r)(q+r)}{c^2} \Leftrightarrow \frac{1}{q+r} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{r+p} \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{1}{p+q} \cdot \frac{1}{c^2}$$

$$K'_m = X(194) = \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) : \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) : \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right)$$

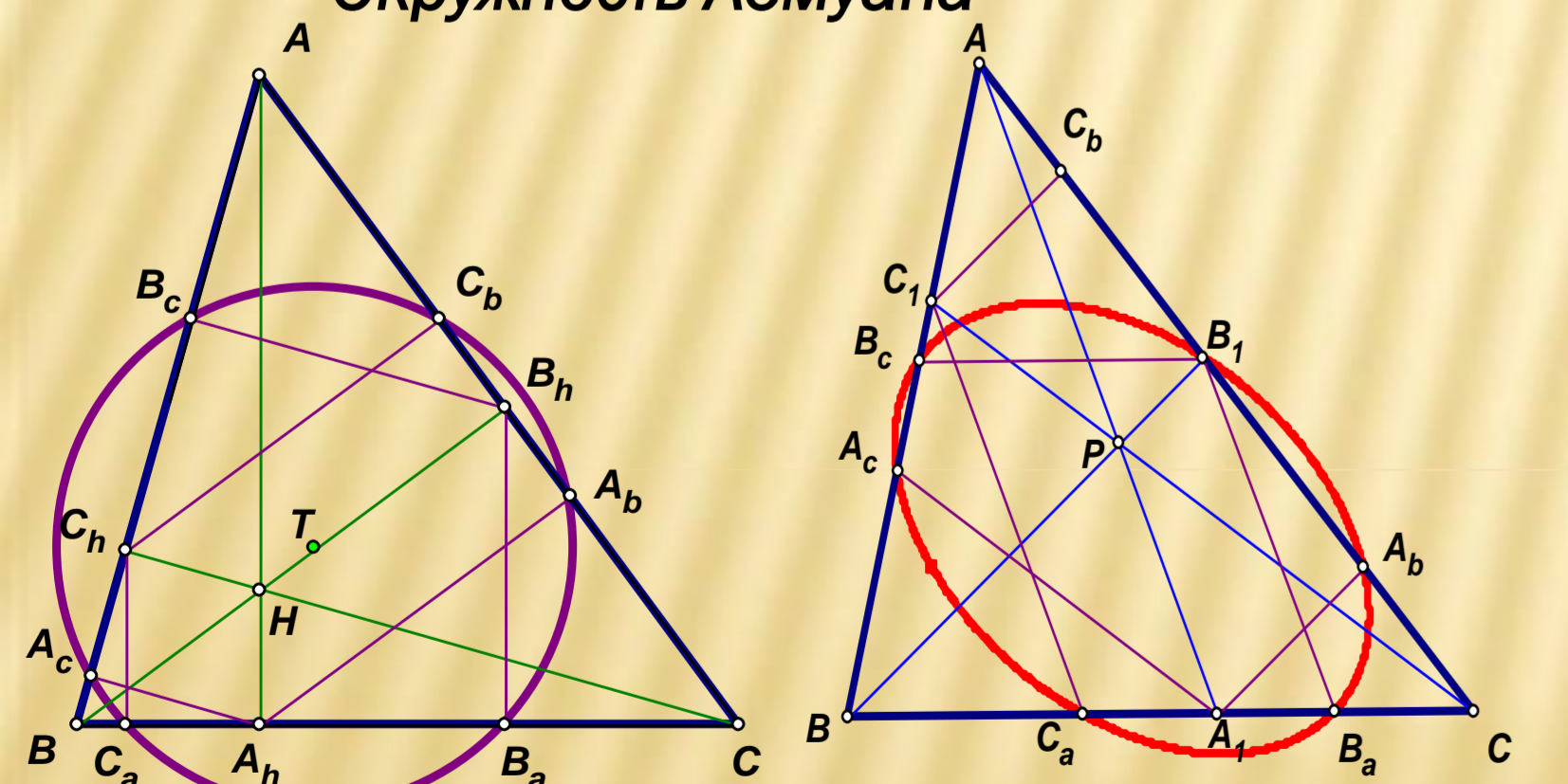
$K'_m$  - точка, изотомически сопряженная точке Лемуана антидополнительного треугольника  $A'B'C'$ .



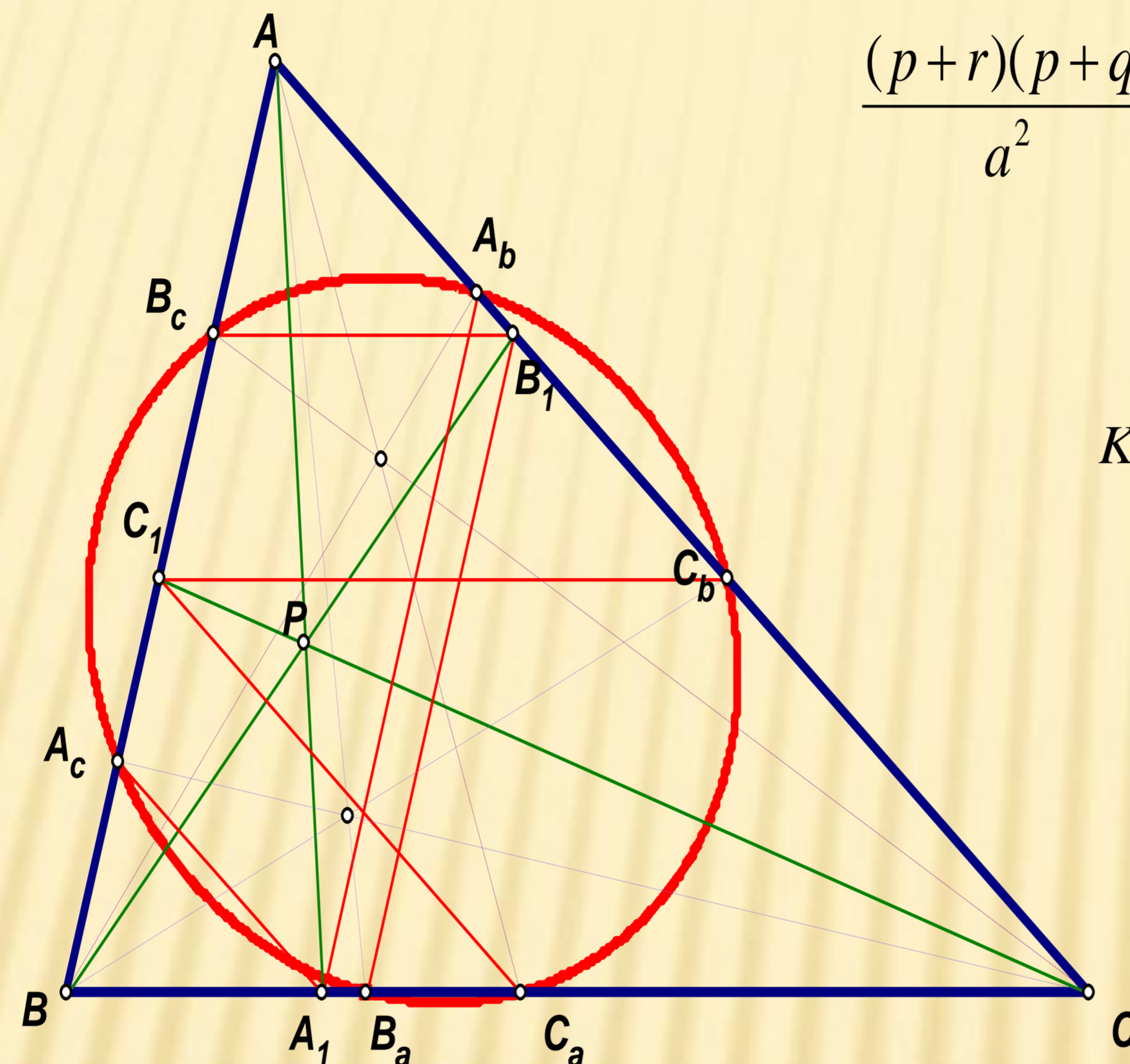
Окружность Эйлера



Окружность Лемуана



Окружность Тейлора



1)  $P = (p : q : r)$

$B_a(0 : p : r), B_c(p : r : 0)$

2)  $C_a(0 : q : p), C_b(p : 0 : q)$

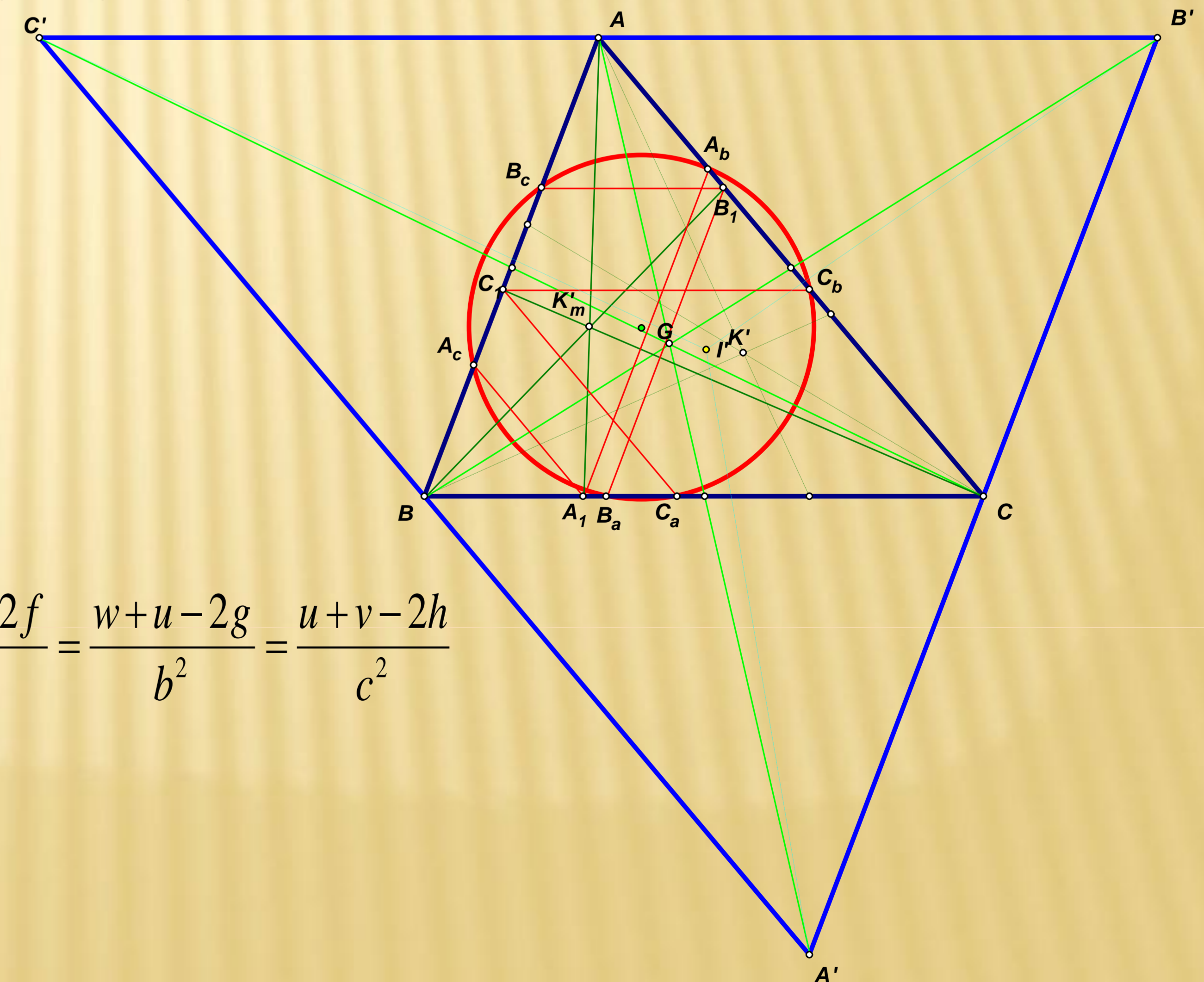
$A_b(q : 0 : r), A_c(r : q : 0)$

3)  $ux^2 + vy^2 + wz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$

$u = -2rq; v = -2pr; w = -2pq;$

4)  $f = p^2 + qr; g = q^2 + rp; h = r^2 + pq$

5)  $\frac{v+w-2f}{a^2} = \frac{w+u-2g}{b^2} = \frac{u+v-2h}{c^2}$



$$\left( \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{CA_2}} \right) \cdot \left( \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{AB_2}} \right) \cdot \left( \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{BC_2}} \right) = 1$$

Условие Карно

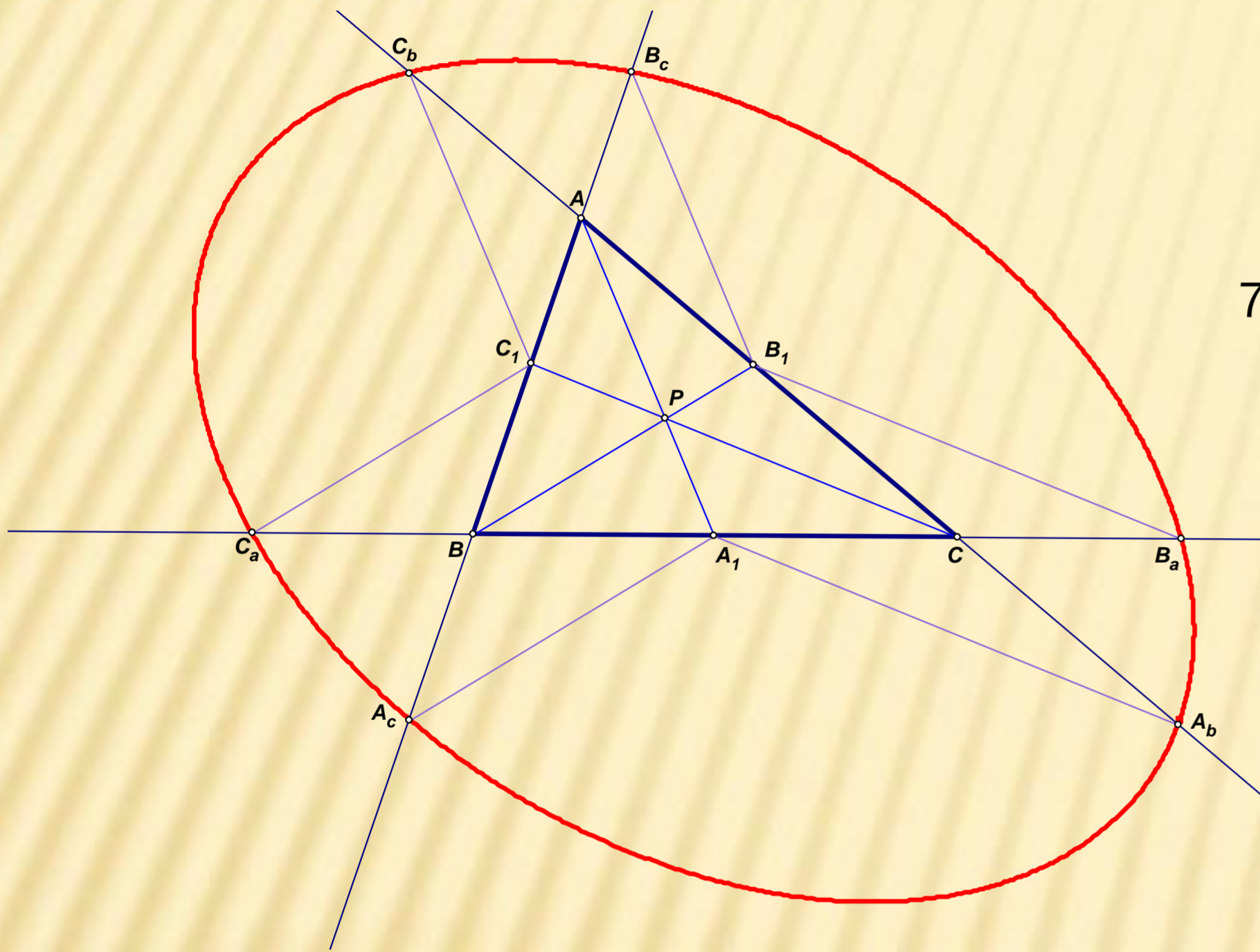


# О некоторых окружностях, связанных с треугольником

Выполнили: ученики ГБОУ лицей 1511 при НИЯУ «МИФИ» Государев Станислав, Чувичкин Владимир

Научный руководитель: Мякишев Алексей Геннадьевич, учитель математики лицея №1303, заслуженный преподаватель г. Москвы

## Вторая конструкция



- 1)  $P = (p : q : r)$
- 2)  $A_b = (-p : 0 : s), A_c = (-p : s : 0)$   
 $B_a = (0 : -q : s), B_c = (s : -q : 0)$   
 $C_a = (0 : s : -r), C_b = (s : 0 : -r)$   
 где  $s = p + q + r$
- 3)  $u = 2rqs; v = 2prs; w = 2qps;$   
 $f = p(s^2 + qr); g = q(s^2 + pr); h = r(s^2 + pq)$
- 4)  $\frac{p}{(q+r)a^2} = \frac{q}{(r+p)b^2} = \frac{r}{(p+q)c^2}$
- 5)  $\frac{p}{(1-p)a^2} = \frac{q}{(1-q)b^2} = \frac{r}{(1-r)c^2}$
- 6)  $p = \frac{1}{1+p'}$

$$7) \left\{ \begin{aligned} p'^3 - p' \left( \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^4} \right) - \frac{2b^2c^2}{a^4} &= 0 \\ q' &= \frac{a^2}{b^2} p' \\ r' &= \frac{a^2}{c^2} p' \end{aligned} \right.$$

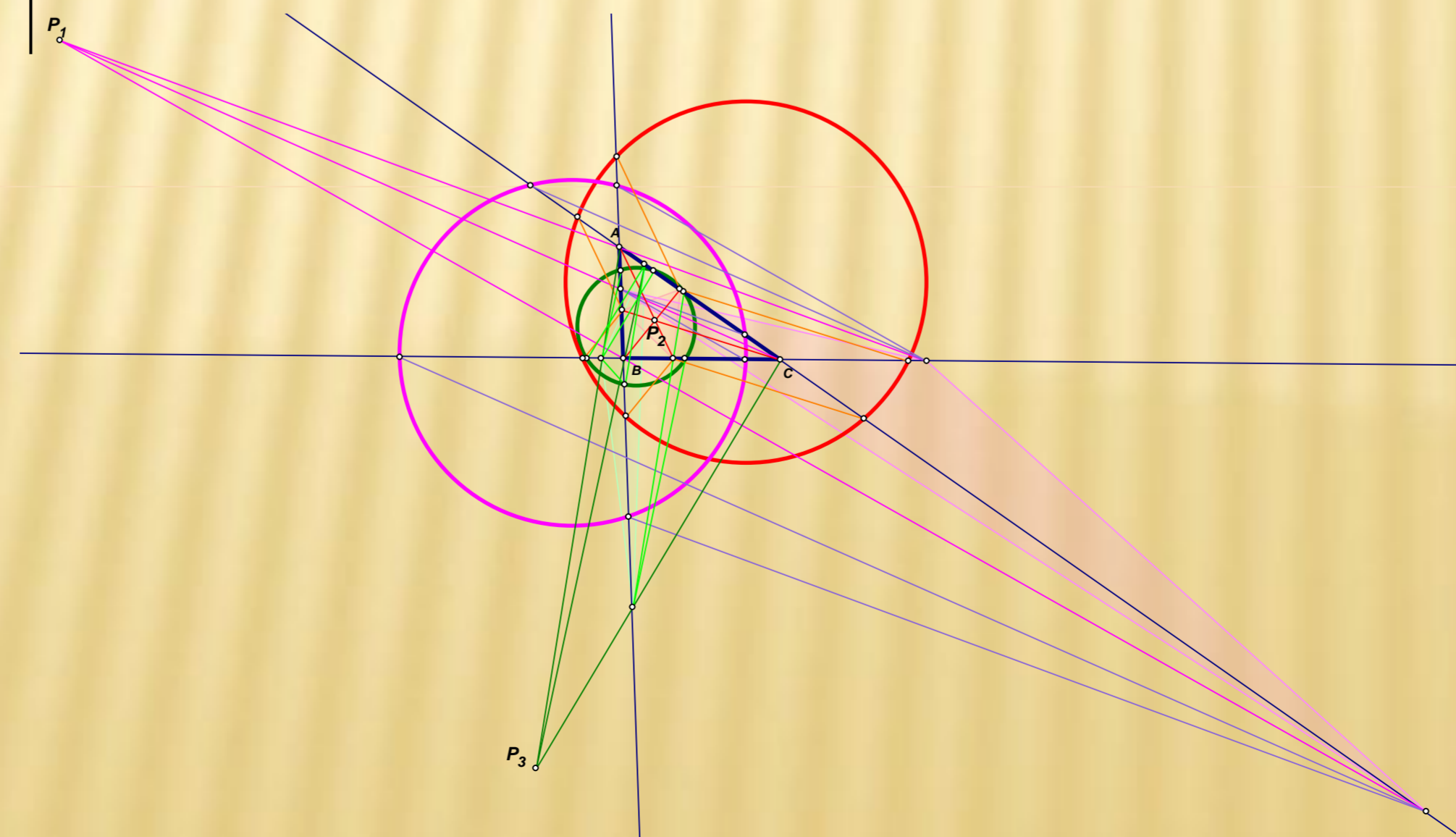
$$P_k = \left( p_k = \frac{1}{1+p_k}, q_k = \frac{1}{1+q_k}, r_k = \frac{1}{1+r_k} \right), \text{ где } k=1, 2, 3$$

$$p'_k = \frac{C}{a^2} \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi(k-1)}{3}\right), \quad q'_k = \frac{C}{b^2} \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi(k-1)}{3}\right)$$

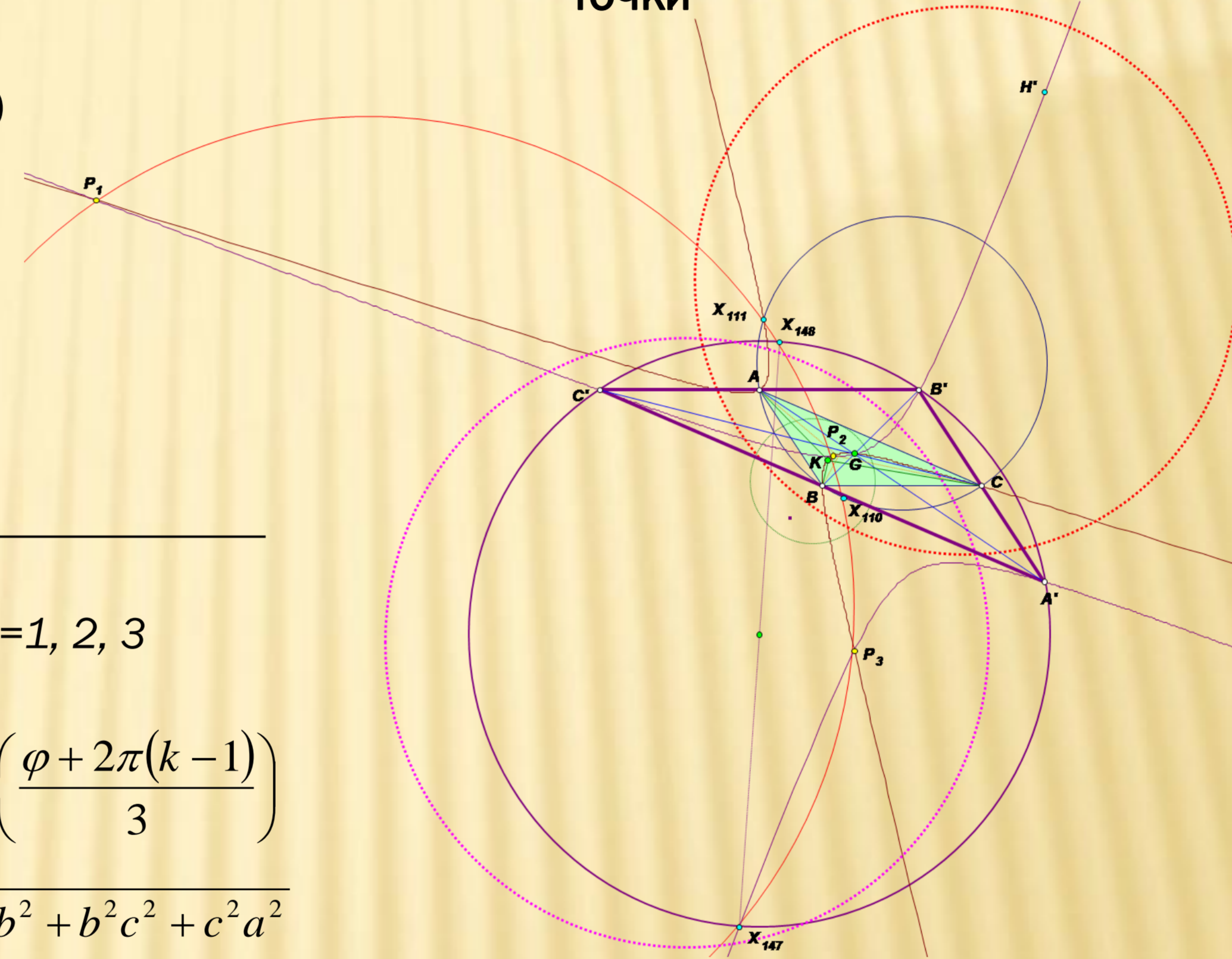
$$r'_k = \frac{C}{c^2} \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi(k-1)}{3}\right), \quad C = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

$$\varphi = \arcsin(-8a^2b^2c^2C^{-3}) =$$

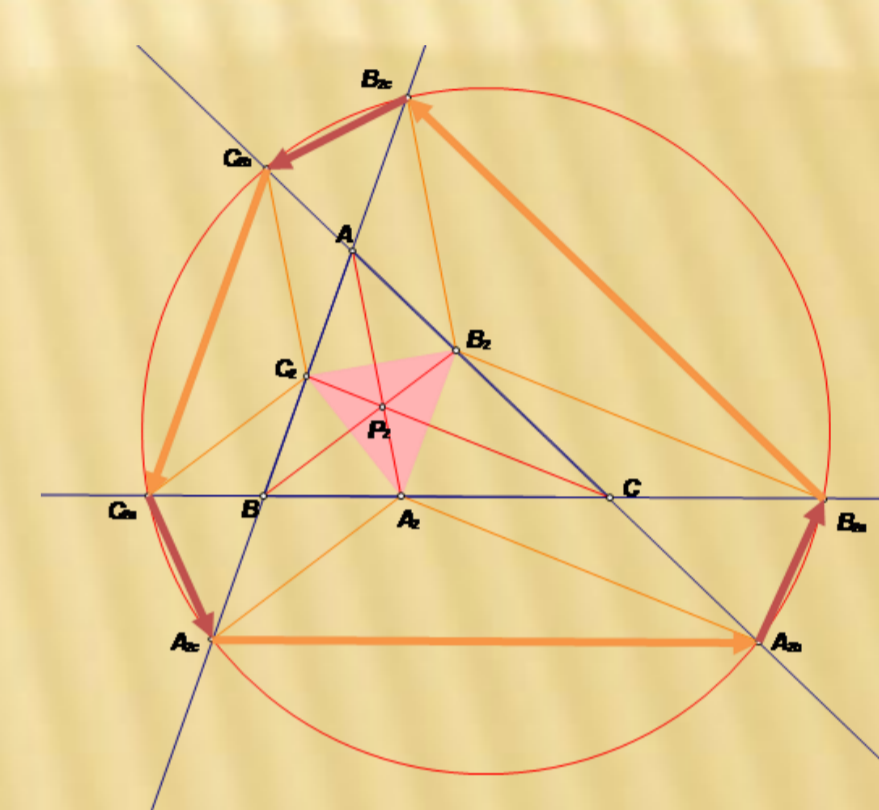
$$= \arcsin\left(-3\sqrt{3} \frac{a^2b^2c^2}{(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}\right)$$



## Некоторые интересные точки



## Окружность Тукера



## Выводы

В результате были обнаружены два семейства коник, с условиями их вырождения в окружность. Особый интерес представляет второе семейство, так как в нем получилась не одна, а целых три окружности с одним интересным геометрическим свойством.

## Литература

- [1] А. Акопян, А. Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка. М., МЦНМО, 2011.
- [2] А. Мякишев. Элементы геометрии треугольника. М., МЦНМО, 2009.
- [3] В. Прасолов. Задачи по планиметрии. М., МЦНМО, 2007.
- [4] А. Савельев. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. Москва-Ижевск, НИЦ: Регулярная и хаотическая динамика, 2002.
- [5] С. Табачников, Д. Фукс. Математический дивертисмент: 30 лекций по классической математике. М., МЦНМО, 2011.
- [6] И. Шарыгин. Геометрия. Планиметрия. (Задачник 9-11). М., Дрофа, 2001.
- [7] Bradley C. The Algebra of Geometry. Cartesian, Areal and Projective Co-ordinates. UK, Bath, Highperception Ltd, 2007.
- [8] Kimberling C. Encyclopedia of Triangle Centers.
- [9] Honsberger R. Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry. (New Mathematical Library, issue 37). The Mathematical Association of America, 1995.
- [10] Yiu P. Introduction to the Geometry of the Triangle.